ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εισαγωγικά

Προβλήματα μακροχρόνιου προγραμματισμού:
Αναφέρονται στην ορθολογική επιλογή της θέσης, του μεγέθους και των πιθανών επεκτάσεων μίας βιομηχανικής μονάδας.

Π*ροβλήματα μεσοπρόθεσμου προγραμματισμού:*
*Α*ναφέρονται στα μεσοπρόθεσμα χρονικά πλαίσια, στα οποία δραστηριοποιείται μία παραγωγική μονάδα και περιλαμβάνει κυρίως τη σχεδίαση της συνολικής παραγωγής για την επόμενη χρονική περίοδο. Ο σχεδιασμός της παραγωγής αποτελεί το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στον μακροχρόνιο προγραμματισμό και *στα* ***προβλήματα βραχυπρόθεσμου προγραμματισμού*** των συστημάτων παραγωγής που αποτελούν την τρίτη κατηγορία των σχετικών προβλημάτων.

Στην κατηγορία αυτή ανήκει ο *προγραμματισμός παραγωγής*, κύριο αντικείμενο του οποίου είναι η εκπόνηση λεπτομερών προγραμμάτων παραγωγής που έχουν καθαρά βραχυπρόθεσμη βάση.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Τα πιο συνηθισμένα ερωτήματα του προγραμματισμού μιας παραγωγικής διαδικασίας αφορούν:
- το "***πόσο***" (ποιες είναι οι απαιτούμενες ποσότητες παραγωγής) και
- το "***πότε***" (ποια είναι η ενδεδειγμένη σειρά εκτέλεσης των επιμέρους εργασιών).

Υπάρχουν ωστόσο πολλές περιπτώσεις, στις οποίες η ύπαρξη τεχνολογικών περιορισμών οδηγεί στην ανάγκη απόφασης για το "***πώς***", ποια είναι δηλαδή η πιο κατάλληλη κατανομή των εργασιών στα διαθέσιμα μέσα παραγωγής.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Οι βασικές προϋποθέσεις που δημιουργούν στην πράξη την πιθανότητα παρουσίας του προβλήματος της άριστης κατανομής είναι οι εξής:

- Υπάρχει ένα σύνολο εργασιών που πρέπει να πραγματοποιηθούν.
- Υπάρχει ένα σύνολο διαθέσιμων μέσων, στα οποία πρόκειται να ανατεθεί η εκτέλεση των εργασιών.
- Η σειρά εκτέλεσης των εργασιών δεν έχει καμία σημασία.
  Κατά πάσα πιθανότητα μάλιστα εκτελούνται ταυτόχρονα.
- Τα μέσα εκτέλεσης διαφέρουν μεταξύ τους ως προς κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο αποτελεσματικότητας.
- Κάθε μέσο είναι σε θέση να εκτελέσει περισσότερες από μία εργασίες.

Μαθηματικό Μοντέλο

Το πρόβλημα της κατανομής μπορεί να διατυπωθεί στη γενική του μορφή ως εξής:

"Δίνονται *n* εργασίες, *n* μέσα εκτέλεσής τους καθώς και η αποτελεσματικότητα του κάθε μέσου για την εκτέλεση της καθεμιάς από τις εργασίες. Ζητείται να γίνει η κατανομή των εργασιών στα μέσα εκτέλεσης, έτσι ώστε να βελτιστοποιείται ένα ορισμένο κριτήριο αποτελεσματικότητας".

Δίνεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = |a_{ij}|$, με στοιχεία $a_{ij} > 0$ όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$ και ζητείται ο προσδιορισμός των στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα $X = |x_{ij}|$, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_{ij}$$

η οποία υπόκειται στους περιορισμούς

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$x_{ij} = x_{ij}^2$ όπου i, j = 1, 2,..., n

Ουσιαστικά ζητείται η επιλογή ενός συνόλου *n* στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα, τέτοιων ώστε κανένα από αυτά να μην ανήκει στην ίδια γραμμή ή στήλη με οποιοδήποτε άλλο και το συνολικό άθροισμά τους να είναι ελάχιστο.

Οι εξισώσεις των περιορισμών καθορίζουν για τα στοιχεία του πίνακα τις συνθήκες:

α) $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η εργασία } j \text{ ανατίθεται προς εκτέλεση στο μέσο } i \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$

β) Σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα *X* υπάρχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο (το οποίο ισούται με τη μονάδα και αντιστοιχεί σε στοιχείο του πίνακα A που συμμετέχει στην άριστη λύση).

Μεθοδολογία Επίλυσης

1. Εύρεση του μικρότερου στοιχείου κάθε στήλης και αφαίρεσή του από όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης.

2. Προσδιορισμός του ελάχιστου αριθμού ευθειών n_1 που καλύπτουν όλα τα μηδενικά στοιχεία.
   Αν $n_1 = n \Rightarrow$ Η άριστη λύση έχει βρεθεί. Μεταφορά στο στάδιο 7.
   Αν $n_1 < \mathrm{n} \Rightarrow$ Συνέχεια στο στάδιο 3.

3. Εύρεση του μικρότερου στοιχείου κάθε γραμμής και αφαίρεσή του από όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής.

4. Προσδιορισμός του ελάχιστου αριθμού ευθειών n_2 που καλύπτουν όλα τα μηδενικά στοιχεία.
   Αν $n_2 = n \Rightarrow$ Η άριστη λύση έχει βρεθεί. Μεταφορά στο στάδιο 7.
   Αν $n_2 < n \Rightarrow$ Συνέχεια στο στάδιο 5.

5. Εύρεση του μικρότερου στοιχείου του πίνακα από αυτά που δεν ανήκουν στις n_2 ευθείες.
   Αφαίρεσή του από τα εκτός των n_2 ευθειών στοιχεία.
   Πρόσθεσή του στα στοιχεία που αποτελούν τις τομές των n_2 ευθειών.

6. Προσδιορισμός του ελάχιστου αριθμού ευθειών n_3 που καλύπτουν όλα τα μηδενικά στοιχεία.
   Αν $n_3 = n \Rightarrow$ Η άριστη λύση έχει βρεθεί. Μεταφορά στο στάδιο 7.
   Αν $n_3 < n \Rightarrow$ Επιστροφή στο στάδιο 5.

7. Υπάρχει ένα σύνολο από n ανεξάρτητα μηδενικά στοιχεία, καθένα από τα οποία βρίσκεται σε διαφορετική γραμμή και σε διαφορετική στήλη από όλα τα υπόλοιπα. Τα στοιχεία του αρχικού πίνακα που βρίσκονται στις θέσεις αυτών των n μηδενικών απαρτίζουν την άριστη λύση

Πρότυπο Παράδειγμα

Μία μηχανογραφική εφαρμογή αποτελείται από 5 προγράμματα υπολογιστή (1-5), η κωδικοποίηση των οποίων θα ανατεθεί σε 5 προγραμματιστές (Α-Ε). Καθένας από αυτούς μπορεί να συντάξει οποιοδήποτε από τα πέντε προγράμματα με διαφορετική όμως αποτελεσματικότητα που εξαρτάται από την αντίστοιχη εμπειρία του. Ως κριτήριο αποτελεσματικότητας επιλέγεται ο χρόνος ανάπτυξης των προγραμμάτων.

	1	2	3	4	5
Α	13	5	9	18	12
Β	13	19	6	13	14
Γ	3	2	4	4	5
Δ	18	9	13	20	16
Ε	12	6	14	19	10

Σε ποιον προγραμματιστή πρέπει να ανατεθεί η σύνταξη του κάθε προγράμματος, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης όλης της εφαρμογής;

Στάδιο 1

Εξετάζονται όλες οι γραμμές του αρχικού πίνακα *A* και βρίσκεται το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής. Σχηματίζεται ένας νέος πίνακας A_1 αφαιρώντας το ελάχιστο στοιχείο κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής.

	1	2	3	4	5
Α	8	0	4	13	7
Β	7	13	0	7	8
Γ	1	0	2	2	3
Δ	9	0	4	11	7
Ε	6	0	8	13	4

Στάδιο 2

Προσδιορίζεται ο ελάχιστος αριθμός ευθειών (οριζοντίων ή καθέτων) έστω n_1, που καλύπτει όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα A_1.
Αν $n_1 = n$ τότε υπάρχει ένα σύνολο από n ανεξάρτητα μηδενικά στοιχεία, κανένα από τα οποία δε βρίσκεται στην ίδια γραμμή ή στήλη με οποιοδήποτε άλλο, οπότε έχει βρεθεί η άριστη λύση. Αν $n_1 < n$, η άριστη λύση δεν έχει ακόμη βρεθεί.

	1	2	3	4	5
Α	8	0	4	13	7
Β	7	13	0	7	8
Γ	1	0	2	2	3
Δ	9	0	4	11	7
Ε	6	0	8	13	4

Τα μηδενικά στοιχεία καλύπτονται με δύο ευθείες.
Έτσι n_1=2 < n=5, οπότε η διαδικασία πρέπει να συνεχιστεί.

Στάδιο 3

Εξετάζονται όλες οι στήλες του πίνακα A_1 και βρίσκεται το μικρότερο στοιχείο κάθε στήλης. Σχηματίζεται νέος πίνακας A_2 αφαιρώντας το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης.

[Τα στάδια 1 και 3 μπορούν να αντιμετατεθούν, να εξεταστούν δηλαδή πρώτα οι στήλες και μετά οι γραμμές].

Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας A_2:

	1	2	3	4	5
Α	7	0	4	11	4
Β	6	13	0	5	5
Γ	0	0	2	0	0
Δ	8	0	4	9	4
Ε	5	0	8	11	1

Στάδιο 4

Προσδιορίζεται ο ελάχιστος αριθμός ευθειών, έστω n_2, που καλύπτει όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα A_2.
Αν $n_2=n$, τότε υπάρχει ένα σύνολο από n μηδενικά, κανένα από τα οποία δε βρίσκεται στην ίδια γραμμή ή στήλη με άλλο και έχει βρεθεί ή άριστη λύση.
Αν $n_2<n$, δεν έχει ακόμη βρεθεί η άριστη λύση.

	1	2	3	4	5
Α	7	0	4	11	4
Β	6	13	0	5	5
Γ	0	0	2	0	0
Δ	8	0	4	9	4
Ε	5	0	8	11	1

Τα μηδενικά στοιχεία καλύπτονται με τρεις ευθείες.
Συνεπώς $n_2=3 < n=5$ και η διαδικασία συνεχίζεται.

Στάδιο 5

Βρίσκεται το ελάχιστο στοιχείο από αυτά που δεν ανήκουν στις n_2 ευθείες που καλύπτουν όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα A_2. Σχηματίζεται νέος πίνακας A_3, αφαιρώντας αυτό το στοιχείο από όλα τα στοιχεία του πίνακα που δεν ανήκουν στις n_2 ευθείες και προσθέτοντάς το σε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στις τομές - αν αυτές υπάρχουν - των n_2 ευθειών.

Το ελάχιστο στοιχείο που δεν καλύπτεται από τις n_2 ευθείες των μηδενικών στον πίνακα A_2 είναι το (Ε, 5)=1. Αυτό θα αφαιρεθεί από όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στις γραμμές Β και Γ και στη στήλη 2 και θα προστεθεί στα στοιχεία (Β, 2) και (Γ, 2). Μετά από αυτή τη διαδικασία προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας A_3:

	1	2	3	4	5
Α	6	0	3	10	3
Β	6	14	0	5	5
Γ	0	1	2	0	0
Δ	7	0	3	8	3
Ε	4	0	7	10	0

Στάδιο 6

Προσδιορίζεται (όπως ακριβώς στα στάδια 2 και 4) ο ελάχιστος αριθμός ευθειών, έστω n_3, που καλύπτει τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα A_3.
Αν $n_3=n$, τότε έχει βρεθεί η άριστη λύση.
Αν $n_3<n$, τότε η άριστη λύση δε βρέθηκε ακόμη και η διαδικασία συνεχίζεται.

	1	2	3	4	5
Α	6	0	3	10	3
Β	6	14	0	5	5
Γ	0	1	2	0	0
Δ	7	0	3	8	3
Ε	4	0	7	10	0

Τα μηδενικά στοιχεία του τελευταίου πίνακα καλύπτονται με τέσσερις ευθείες (n_3=4), επομένως η διαδικασία πρέπει να συνεχιστεί.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Στάδιο 7

Επαναλαμβάνονται οι διαδικασίες των σταδίων 5 και 6, έως ότου ο ελάχιστος αριθμός ευθειών που καλύπτει όλα τα μηδενικά στοιχεία του αντίστοιχου πίνακα είναι ίσος με *n.* Υπάρχει τότε ένα σύνολο από *n* μηδενικά στοιχεία, κανένα από τα οποία δε βρίσκεται στην ίδια γραμμή ή στήλη με οποιοδήποτε άλλο.

Το μικρότερο στοιχείο του τελευταίου πίνακα του που είναι εκτός των ευθειών n_3 είναι το (Ε, 1)=4. Εφαρμόζοντας τις διαδικασίες των σταδίων 5 και 6 προκύπτει ο πίνακας:

	1	2	3	4	5
Α	2	0	3	6	3
Β	2	14	0	1	5
Γ	0	5	6	0	4
Δ	3	0	3	4	3
Ε	0	0	7	6	0

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα καλύπτονται και πάλι με τέσσερις ευθείες (n_4=4), επομένως η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί. Το ελάχιστο στοιχείο εκτός των ευθειών είναι το (*A*, 1)=2, οπότε επαναλαμβάνοντας ακόμη μία φορά το στάδιο 5, σχηματίζεται ο πίνακας:

	1	2	3	4	5
Α	0*	0	1	4	1
Β	0	16	0*	1	5
Γ	2	7	6	0*	4
Δ	1	0*	1	2	1
Ε	0	2	7	6	0*

Τα μηδενικά στοιχεία του παραπάνω πίνακα δεν μπορούν να καλυφθούν με λιγότερες από πέντε ευθείες. Ως εκ τούτου n_5=5, οπότε υπάρχουν πέντε ανεξάρτητα μηδενικά στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει σημειωθεί με έναν αστερίσκο.
Η λύση αυτή συνίσταται από τα στοιχεία του αρχικού πίνακα *A* που αντιστοιχούν σε αυτές ακριβώς τις θέσεις.

Άριστη λύση

Προγράμματα Η/Υ

		1	2	3	4	5
	Α	**13***	5	9	18	12
	Β	13	9	**6***	13	14
Προγραμματιστές	Γ	3	2	4	**4***	5
	Δ	18	**9***	13	20	16
	Ε	12	6	14	19	**10***

[

Επομένως η σύνταξη του 1ου προγράμματος πρέπει να ανατεθεί στον προγραμματιστή Α, του 2ου στον Δ, του 3ου στον Β, του 4ου στον Γ και η σύνταξη του 5ου προγράμματος στον προγραμματιστή Ε.

Ο ελάχιστος συνολικός χρόνος που απαιτείται για να εκτελεστεί με την κατανομή αυτή ολόκληρη η μηχανογραφική εφαρμογή είναι 42 ώρες.

Οικονομική Ερμηνεία – Ευκαιριακό Κόστος

Η μεθοδολογία επίλυσης των προβλημάτων κατανομής βασίζεται σε μία θεμελιώδη οικονομική έννοια που λέγεται ***κόστος ευκαιρίας*** ή ***ευκαιριακό κόστος***.

Το κόστος αυτό παρουσιάζεται κάθε φορά που οι συντελεστές πραγματοποίησης κάποιας δραστηριότητας δε χρησιμοποιούνται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Παράδειγμα ευκαιριακού κόστους

Παραλλαγές του Προβλήματος Κατανομής

Πίνακας Κατανομής m * n, όπου m ≠ n

Προκειμένου να βρεθεί η άριστη λύση προβλημάτων στα οποία ισχύει $m \neq n$, είναι απαραίτητη η προσθήκη του αναγκαίου αριθμού γραμμών (όταν $m < n$) ή στηλών (όταν $m > n$).

Μία ***πρόσθετη γραμμή*** παριστάνει γενικά μια *πλασματική εργασία,* η οποία εξυπηρετεί στον τετραγωνισμό του πίνακα και πρόκειται τελικά να κατανεμηθεί στο πιο 'ασύμφορο' μέσο.

Μια ***πρόσθετη στήλη*** συμβολίζει ένα *πλασματικό μέσο*, το οποίο πρόκειται τελικά να εκτελέσει την πιο 'ασύμφορη' εργασία.

Συμπλήρωση των στοιχείων των πρόσθετων γραμμών ή στηλών.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Αδυναμία Πραγματοποίησης Ορισμένων Κατανομών

Σε πολλές εφαρμογές υπεισέρχονται διάφοροι περιορισμοί τεχνολογικής, χωροταξικής ή άλλης φύσης. Οι περιορισμοί αυτοί αποκλείουν την υλοποίηση ορισμένων κατανομών και κατά συνέπεια τη συμμετοχή τους στην άριστη λύση.

Η τιμή του αντίστοιχου/ων στοιχείου/ων του πίνακα κατανομής πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να μη συμφέρει σε καμία περίπτωση η συμμετοχή της στην άριστη λύση.
Σε προβλήματα ελαχιστοποίησης δίνεται μία πολύ μεγάλη θετική τιμή ίση με M (όπου $M >> 0$ για $\forall x_{ij}$), ενώ σε προβλήματα μεγιστοποίησης μία πολύ μικρή αρνητική τιμή που τίθεται ίση με $-M$.

Η διαχείριση (αριθμητικές πράξεις, συγκρίσεις κ.λπ.) της ποσότητας M δε διαφέρει σε τίποτε από αυτόν των υπόλοιπων αριθμητικών στοιχείων του πίνακα.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Προβλήματα Μεγιστοποίησης

Ένα πρόβλημα κατανομής, του οποίου αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση κάποιου κριτηρίου αποτελεσματικότητας λύνεται με την ίδια μέθοδο.

Πρέπει όμως να γίνει προηγουμένως ο ακόλουθος απλός μετασχηματισμός:
“Προσδιορίζεται το μεγαλύτερο στοιχείο, έστω $\max(\alpha_{ij})$, του αρχικού πίνακα κατανομής A και σχηματίζεται ένας νέος πίνακας *A′* με στοιχεία α'_{ij}, τα οποία υπολογίζονται από τη σχέση: $\alpha'_{ij} = max(\alpha_{ij}) - \alpha_{ij}$».
Αφαιρείται δηλαδή κάθε στοιχείο του αρχικού πίνακα από το στοιχείο του πίνακα που έχει τη μέγιστη τιμή και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης καταλαμβάνει την αντίστοιχη θέση στον νέο πίνακα *A′.*

Κατόπιν το πρόβλημα λύνεται με το γνωστό τρόπο και προσδιορίζεται η άριστη κατανομή, με την οποία μεγιστοποιείται το κριτήριο αποτελεσματικότητας.

Για την καταγραφή των στοιχείων που συμμετέχουν στην άριστη λύση απαιτείται η επιστροφή στον αρχικό πίνακα *A* του προβλήματος μεγιστοποίησης.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

Προγραμματισμός εκτέλεσης εργασιών είναι ο όρος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του λεπτομερούς χρονοδιαγράμματος των εργασιών που συνιστούν μία παραγωγική διαδικασία.

Γενική διατύπωση προβλήματος

"Έστω *n* ανεξάρτητες μεταξύ τους εργασίες, καθεμιά από τις οποίες πρέπει να περάσει διαδοχικά από *m* μέσα εκτέλεσης. Ζητείται η αλληλουχία εκτέλεσης που εξασφαλίζει τον ελάχιστο συνολικό χρόνο για την πραγματοποίηση όλων των εργασιών".

Εκτέλεση Σειράς n Εργασιών σε Ένα Μέσο

Διατύπωση προβλήματος

"Έστω *n* εργασίες, οι οποίες πρόκειται να εκτελεστούν διαδοχικά σε ένα μέσο και t_i ο χρόνος εκτέλεσης της εργασίας *i* (όπου *i = 1, 2,..., n)*. Ζητείται η εύρεση της αλληλουχίας εκτέλεσης των *n* εργασιών, με την οποία ελαχιστοποιείται ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης".

Υπάρχουν *n!* διαφορετικές αλληλουχίες εκτέλεσης. Οποιαδήποτε από αυτές και αν επιλεγεί από αυτές, οδηγεί στον ίδιο συνολικό χρόνο απασχόλησης του μέσου εκτέλεσης των εργασιών. Σε κάθε περίπτωση το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην έναρξη εκτέλεσης της πρώτης εργασίας και στην ολοκλήρωση της τελευταίας θα είναι πάντοτε το ίδιο, εφόσον η συνολική ποσότητα εργασίας παραμένει αμετάβλητη. Επίσης δεν υπάρχει καθόλου νεκρός χρόνος στην απασχόληση του μοναδικού μέσου. Φαινομενικά λοιπόν η επιλογή μίας ορισμένης αλληλουχίας δεν προκαλεί καμία αλλαγή.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Το μοναδικό μετρήσιμο μέγεθος που μπορεί να μεταβληθεί εξαιτίας της αλληλουχίας εκτέλεσης είναι η χρονική στιγμή ολοκλήρωσης της κάθε επιμέρους εργασίας.

Προκύπτει το συμπέρασμα ότι για να είναι προτιμότερη η αλληλουχία S_1 πρέπει η διάρκεια της εργασίας j να είναι μικρότερη της $j+1$. Επομένως πρέπει να προηγείται η εργασία με το μικρότερο χρόνο εκτέλεσης. Εξυπακούεται ότι αν $t_j = t_{j+1}$ οι δύο αλληλουχίες είναι ισοδύναμες.

Επομένως ισχύει η πρόταση:
“Αν για τους χρόνους εκτέλεσης n εργασιών σε ένα μέσο ισχύει η σχέση $t_1 < t_2 < ... < t_n$ τότε η άριστη αλληλουχία εκτέλεσης θα είναι η $S^* = \{1, 2, ..., n\}$”.

Όταν λοιπόν δε συντρέχει κάποιος λόγος για κάτι διαφορετικό, συνιστάται η κατά προτεραιότητα εκτέλεση των εργασιών με τη μικρότερη διάρκεια.

Εκτέλεση Σειράς n Εργασιών σε Δύο Μέσα

Οι βασικές προϋποθέσεις και περιορισμοί του προβλήματος της εκτέλεσης σειράς *n* εργασιών σε δύο μέσα συνοψίζονται στα εξής:

1. Υπάρχουν δύο μέσα εκτέλεσης των εργασιών, έστω Α και Β.
2. Όλες οι εργασίες πρέπει οπωσδήποτε να περάσουν πρώτα από το μέσο Α και κατόπιν από το μέσο Β.
3. Καμία εργασία δεν μπορεί να αρχίσει στο μέσο Β αν δεν έχει ολοκληρωθεί η εκτέλεσή της στο μέσο Α.
4. Οι χρόνοι εκτέλεσης των εργασιών α_i και β_i είναι δεδομένοι για κάθε εργασία *i* (όπου i = 1, 2, ..., n).

Οι κύριες μεταβλητές του προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

- Οι χρόνοι εκτέλεσης των εργασιών α_i (i = 1, 2, ..., n) στο μέσο Α
- Οι χρόνοι εκτέλεσης των εργασιών β_i (i = 1, 2, ..., n) στο μέσο Β
- Οι νεκροί χρόνοι x_i, που μπορεί να παρουσιαστούν ανάμεσα στην ολοκλήρωση της εργασίας *i-1* στο μέσο Β και στην έναρξη της εργασίας *i* στο ίδιο μέσο.

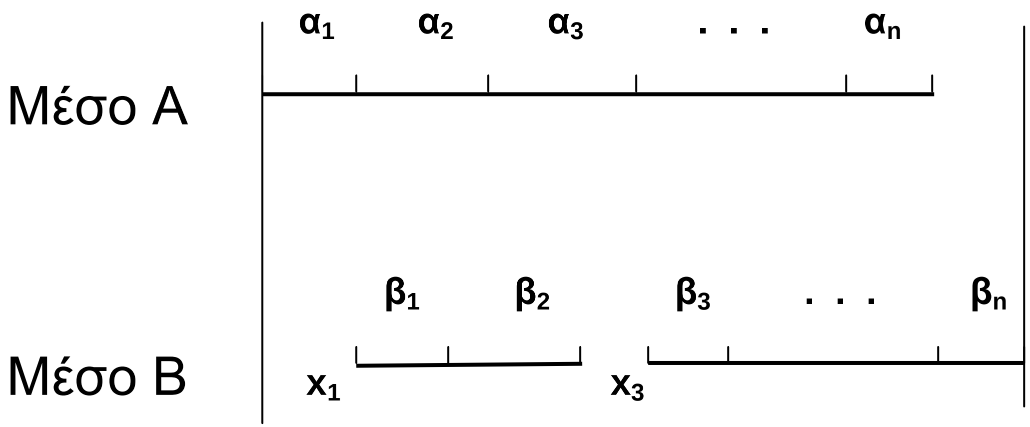
Αντικειμενικός στόχος του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διεκπεραίωσης, έστω *T*, όλων των εργασιών. Αναζητείται η αλληλουχία, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\min T = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n} x_n$$

Εφόσον οι χρόνοι εκτέλεσης των εργασιών είναι αμετάβλητοι, το άθροισμα $\Sigma\beta_i$ είναι πάντα σταθερό. Επομένως, για να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος *T* αρκεί να γίνει ελάχιστη η ποσότητα: Σxi (i = 1,2,...n)

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Χρονοδιάγραμμα εκτέλεσης n εργασιών σε δύο μέσα



1) Η συνολική χρονική διάρκεια *T* ισούται με το άθροισμα του χρόνου που απαιτείται για την εκτέλεση όλων των εργασιών στο μέσο Α και του χρονικού διαστήματος β_n που απαιτείται για την εκτέλεση της τελευταίας εργασίας στο μέσο Β. Επομένως:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_n$$

2) Η συνολική χρονική διάρκεια *T* ισούται με το άθροισμα του χρονικού διαστήματος α_1 που απαιτείται για την εκτέλεση της πρώτης εργασίας στο μέσο Α και του χρόνου που απαιτείται για την εκτέλεση όλων των εργασιών στο μέσο Β. Άρα:

$$T = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_n$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Οι δύο παραπάνω σχέσεις υπαγορεύουν ότι για να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος *T* πρέπει να γίνουν τα εξής:

- Ως τελευταία εργασία που θα εκτελεστεί στο μέσο Β πρέπει να επιλεγεί εκείνη με τη μικρότερη διάρκεια $β_i$.

- Ως πρώτη εργασία που θα εκτελεστεί στο μέσο Α πρέπει να επιλεγεί εκείνη με τη μικρότερη διάρκεια $α_i$.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μεθοδολογία εκτέλεσης n εργασιών σε δύο μέσα

1. Καταγραφή όλων των χρόνων α_i και β_i που απαιτούνται για την εκτέλεση των εργασιών *i* (i = 1, 2, ..., n) στα μέσα *A* και *B* αντίστοιχα.

2. Εύρεση της ελάχιστης τιμής μεταξύ των χρόνων α_i και β_i.

3. Αν η ελάχιστη τιμή είναι ένας από τους χρόνους α_i, τότε η αντίστοιχη εργασία τοποθετείται πρώτη στην αλληλουχία.
   Αν η ελάχιστη τιμή είναι ένας από τους χρόνους β_i, τότε η αντίστοιχη εργασία τοποθετείται τελευταία στην αλληλουχία.

4. Η εργασία, η οποία επιλέχθηκε να τοποθετηθεί στην αλληλουχία, διαγράφεται και δε λαμβάνεται υπόψη στην περαιτέρω διαδικασία.

5. Επανάληψη του βήματος 2 χωρίς την εργασία που έχει διαγραφεί. Κάθε νέα εργασία που επιλέγεται τοποθετείται - ως πρώτη ή ως τελευταία - στο εσωτερικό της τρέχουσας διάταξης.

Υπάρχει περίπτωση, η ελάχιστη χρονική διάρκεια που προσδιορίζεται σε κάποια από τις διαδοχικές εφαρμογές του βήματος 2, να μην είναι μόνο μία αλλά περισσότερες με την ίδια ελάχιστη τιμή. Η αντιμετώπιση είναι απλή αν εφαρμοστούν οι δύο ακόλουθοι απλοί κανόνες:

α) Αν δύο ή περισσότερες εργασίες έχουν τον ίδιο χρόνο α_i ή β_i, τότε τοποθετείται πρώτα η εργασία που έχει το μικρότερο δείκτη.

β) Αν σε μία εργασία i οι χρόνοι εκτέλεσης της α_i και β_i είναι ίσοι, τότε η εργασία αυτή τοποθετείται στο εσωτερικό της διάταξης ως πρώτη, σύμφωνα δηλαδή με τον χρόνο α_i.

Εφαρμογή μεθοδολογίας - Αριθμητικό παράδειγμα

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εκτέλεση Σειράς n Εργασιών σε Τρία Μέσα

Η προσθήκη και τρίτου μέσου εκτέλεσης εργασιών καθιστά την επίλυση αυτού του προβλήματος ιδιαίτερα σύνθετη. Η αιτία είναι η ύπαρξη του πολύ μεγάλου πλήθους των $n!^3$ διαφορετικών τρόπων εκτέλεσης. Έχουν αναπτυχθεί μερικές σύνθετες σχετικές μέθοδοι. Τον πιο αποτελεσματικό αναλυτικό αλγόριθμο χρησιμοποιεί η *μέθοδος των διακλαδώσεων και ορίων.*

Υπάρχουν ωστόσο περιπτώσεις προγραμματισμού εκτέλεσης εργασιών σε τρία μέσα, οι οποίες ανάγονται εύκολα στα πολύ πιο απλά προβλήματα εκτέλεσης *n* εργασιών σε δύο μόνο μέσα.

Πρώτη ειδική περίπτωση αναγωγής

Έστω α_i, β_i και γ_i (όπου i = 1, 2, ... n) οι χρόνοι εκτέλεσης της εργασίας *i* στα διαδοχικά μέσα εκτέλεσης Α, Β και Γ αντίστοιχα. Το πρόβλημα ανάγεται σε εκτέλεση η εργασιών σε δύο μέσα αν ισχύει <u>μία από τις δύο</u> παρακάτω συνθήκες:

$\min \alpha_i \geq \max \beta_i$ ή $\min \gamma_i \geq \max \beta_i$

Η αναγωγή δηλαδή είναι εφικτή αν ο ελάχιστος χρόνος του μέσου Α είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μέγιστο χρόνο του μέσου Β ή ο ελάχιστος χρόνος του μέσου Γ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μέγιστο χρόνο του μέσου Β. Αν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε το πρόβλημα λύνεται ως περίπτωση εκτέλεσης *n* εργασιών σε δύο υποθετικά μέσα, έστω Α' και Β', με τους εξής χρόνους εκτέλεσης:

$\alpha'_i = \alpha_i + \beta_i$ και $\beta'_i = \gamma_i + \beta i$

Σημείωση:
Η παραπάνω αναγωγή είναι δυνατή μόνον όταν οι χρόνοι του δεύτερου μέσου ΄εμπεριέχονται΄ σε αυτούς του πρώτου ή του τρίτου μέσου (δεν ισχύει δηλαδή οποιαδήποτε αντίστροφη περίπτωση).

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Δεύτερη ειδική περίπτωση αναγωγής

Οι βασικές προϋποθέσεις εφαρμογής αυτής της περίπτωσης συνοψίζονται στα εξής:

"Αν η αλληλουχία που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας μόνο το πρώτο και το δεύτερο μέσο είναι η ίδια με την αλληλουχία που προκύπτει όταν χρησιμοποιηθεί μόνο το δεύτερο και το τρίτο μέσο, τότε η αλληλουχία αυτή είναι άριστη και για την περίπτωση χρησιμοποίησης του πρώτου και του τρίτου μέσου. Η ίδια αυτή αλληλουχία είναι η άριστη και για το αρχικό πρόβλημα της εκτέλεσης εργασιών σε τρία μέσα".

Επομένως, για να διαπιστωθεί η δυνατότητα εφαρμογής αυτής της ειδικής περίπτωσης αρκεί να επιλυθούν οποιαδήποτε δύο από τα τρία δυνατά προβλήματα *n* εργασιών σε δύο μέσα (1^o – 2^o ή 1^o – 3^o ή 2^o – 3^o). Αν προσδιοριστεί η ίδια σειρά εκτέλεσης, τότε αυτή είναι η άριστη αλληλουχία και για το πρόβλημα των τριών μέσων.

Εφαρμογή μεθοδολογίας - Αριθμητικό παράδειγμα

Εξισορρόπηση Γραμμής Παραγωγής

Η χωροταξικά ορθή διάταξη των παραγωγικών μέσων οδηγεί στα ακόλουθα ευεργετικά αποτελέσματα:

α) Αύξηση του ρυθμού παραγωγής λόγω της ελάττωσης των καθυστερήσεων στη ροή της παραγωγικής διαδικασίας.

β) Μείωση του κόστους μετακίνησης των υλικών λόγω της μείωσης των αποστάσεων που πρέπει αυτά να διανύσουν.

γ) Μείωση των απαιτούμενων επενδύσεων με την καλύτερη εκμετάλλευση των μέσων παραγωγής, της μεταφοράς πρώτων υλών και έτοιμων προϊόντων καθώς και των χώρων παραγωγής.

δ) Βελτίωση της απόδοσης της εργασίας λόγω του κατάλληλου σχεδιασμού των θέσεων εργασίας και ολόκληρης της παραγωγικής διαδικασίας.

ε) Βελτίωση του ηθικού των εργαζομένων με τις καλύτερες δυνατές συνθήκες εργασίας και με την αύξηση της εργασιακής ασφάλειάς τους.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ανάλογα με το είδος της ροής διακρίνονται οι παρακάτω τρεις τύποι διάταξης:

α) Η ***γραμμή παραγωγής*** **ή** ***διάταξη κατά προϊόν***, στην οποία οι θέσεις εργασίας έχουν γραμμική διάταξη. Κλασικά παραδείγματα εφαρμογής της αποτελούν οι χημικές βιομηχανίες, οι αυτοκινητοβιομηχανίες, οι βιομηχανίες τροφίμων και ποτών κ.α.

β) Η ***λειτουργική διάταξη***, στην οποία τα μηχανήματα που εκτελούν το ίδιο είδος κατεργασίας τοποθετούνται συγκεντρωμένα στον ίδιο χώρο. Για παράδειγμα σε ένα μηχανουργείο υπάρχει τμήμα τόρνων, τμήμα φρεζών, τμήμα πρεσών κ.λπ.

γ) Η ***διάταξη ακίνητου προϊόντος***. Το προϊόν που χρειάζεται να επεξεργαστεί δεν μπορεί να μετακινηθεί εύκολα λόγω του όγκου του, οπότε όλες οι εργασίες γίνονται σε συγκεκριμένο χώρο ή πάνω στο ίδιο το προϊόν καθώς αυτό συναρμολογείται. Σχετικά παραδείγματα αποτελούν τα ναυπηγεία και οι αεροπορικές βιομηχανίας.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- ***Στοιχείο εργασίας (i)***
  Αδιαίρετη μονάδα εργασίας, δηλαδή μία στοιχειώδης εργασία που εκτελείται συνήθως από έναν εργαζόμενο ή από ένα μηχάνημα και δεν έχει νόημα η διαίρεσή της σε επιμέρους μικρότερες εργασίες. Η διάρκειά του συμβολίζεται με t_i.

- ***Σταθμός εργασίας***
  Θέση, στην οποία εκτελούνται ένα ή περισσότερα ομοειδή στοιχεία εργασίας. Οι εργασίες ομαδοποιούνται σε σταθμούς, η σειριακή διάταξη των οποίων δημιουργεί τη γραμμή παραγωγής. Για να πραγματοποιηθεί η ομαδοποίηση των εργασιών πρέπει να ληφθούν υπόψη οι υπάρχοντες *τεχνολογικοί περιορισμοί* που αναφέρονται στην απαιτούμενη σειρά εκτέλεσης των εργασιών.
  Ένας σταθμός εργασίας επανδρώνεται με έναν ή περισσότερους εργαζομένους και τον απαραίτητο εξοπλισμό. Υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες ένας εργαζόμενος επανδρώνει περισσότερους από έναν σταθμούς εργασίας.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

- ***Περιεχόμενο εργασίας σταθμού (S_k)***
  Η συνολική ποσότητα εργασίας που εκτελείται σε ένα συγκεκριμένο σταθμό εργασίας. Απαρτίζεται από το άθροισμα των διαρκειών των στοιχείων εργασίας που ανήκουν στον ίδιο σταθμό.

$$S_\kappa = \sum_{i=1}^{m} t_i$$

- ***Χρονικός κύκλος (Τ)***
  Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην ολοκλήρωση (έξοδο από τη γραμμή) δύο διαδοχικών μονάδων ενός προϊόντος. Εξαρτάται άμεσα από το ρυθμό παραγωγής του προϊόντος.

- ***Ρυθμός παραγωγής (P)***
  Ο αριθμός των μονάδων που εξέρχονται από τη γραμμή παραγωγής στη μονάδα του χρόνου. Προσδιορίζει τη ροή, δηλαδή την ταχύτητα της γραμμής παραγωγής.
  Είναι αντιστρόφως ανάλογος του χρονικού κύκλου.

$$T = \frac{1}{P}$$

- ***Καθυστέρηση εξισορρόπησης (d)***
  Αποτελεί το συνολικό *νεκρό χρόνο* λόγω της ατελούς διαίρεσης του περιεχομένου εργασίας της γραμμής μεταξύ των σταθμών εργασίας.
  Ισούται με το σύνολο των νεκρών χρόνων των σταθμών εργασίας της γραμμής.
  Ο κάθε σταθμός έχει νεκρό χρόνο ίσο με τη διαφορά του περιεχομένου εργασίας του από το περιεχόμενο εργασίας του μεγαλύτερου σε διάρκεια σταθμού

$$d = \sum_{i=1}^{A} (T - S_i)$$

όπου A ο αριθμός των σταθμών εργασίας της γραμμής παραγωγής

- ***Δείκτης ομαλότητας (ΔΟ)***
  Αριθμός που αποτελεί το κύριο κριτήριο του βαθμού εξισορρόπησης της γραμμής παραγωγής. Ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών του περιεχομένου εργασίας κάθε σταθμού από το περιεχόμενο του μεγαλύτερου σε διάρκεια σταθμού, δηλαδή του χρονικού κύκλου.

  Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη ομαλότητας, τόσο αυξημένη είναι η ανάγκη για εξισορρόπηση της γραμμής παραγωγής. Όσο μικρότερη τιμή έχει ο δείκτης, τόσο περισσότερο συγκλίνουν μεταξύ τους οι χρόνοι απασχόλησης των σταθμών και μειώνονται οι νεκροί χρόνοι. Μηδενική τιμή του δείκτη υποδηλώνει απόλυτα εξισορροπημένη γραμμή παραγωγής.

$$\text{Δ.Ο.} = \sqrt{\sum_{i=1}^{A} (T - Si)^2}$$

- ***Διάγραμμα διαδοχής***
  Γραφική παράσταση των υφιστάμενων τεχνολογικών περιορισμών στη σειρά εκτέλεσης των στοιχείων εργασίας της γραμμής παραγωγής. Κάθε στοιχείο εργασίας συμβολίζεται με ένα κύκλο, στον οποίο σημειώνεται ο αύξων αριθμός του i και δίπλα η διάρκειά του t_i. Δύο διαδοχικά στοιχεία εργασίας συνδέονται με μία γραμμή με βέλος που δείχνει τη φορά της γραμμής, δηλαδή τη σειρά εκτέλεσης των δύο εργασιών.

- ***Δυϊκοί πίνακες διαδοχής***
  Αποτελούν δύο παράλληλους πίνακες στοιχείων εργασίας. Ο πρώτος (Πίνακας ΄Π΄) περιλαμβάνει εργασίες που προηγούνται κάθε στοιχείου εργασίας, ενώ ο δεύτερος (Πίνακας ΄Ε΄) τις εργασίες που έπονται. Όλα τα στοιχεία εργασίας συμβολίζονται με τον αντίστοιχο αύξοντα αριθμό τους.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μαθηματική Διαμόρφωση

Η καθυστέρηση εξισορρόπησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$d = A * T - \sum_{i=1}^{n} t_i$$

όπου A το πλήθος των σταθμών εργασίας (πάντοτε ακέραιος αριθμός)
T ο χρονικός κύκλος
t_i η διάρκεια του στοιχείου εργασίας i (i = 1, 2, …, n)
n το πλήθος των στοιχείων εργασίας της γραμμής παραγωγής

Υπάρχουν δύο ευδιάκριτες περιπτώσεις:

1. Ελαχιστοποίηση του χρονικού κύκλου για δεδομένο πλήθος σταθμών εργασίας

2. Ελαχιστοποίηση του πλήθους των σταθμών εργασίας για δεδομένο χρονικό κύκλο

Περιορισμοί συνάρτησης εξισορρόπησης

- Ο χρονικός κύκλος πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τη διάρκεια του μεγαλύτερου στοιχείου εργασίας.

$$T \geq \max t$$

- Το περιεχόμενο εργασίας κάθε σταθμού πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο από το χρονικό κύκλο.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i * x_{ij} \leq T$$

όπου j = 1, 2, …, A το πλήθος των σταθμών της γραμμής

και

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν το στοιχείο εργασίας i δεν κατανέμεται στο σταθμό j} \\ 1 & \text{αν το στοιχείο εργασίας i κατανέμεται στο σταθμό j} \end{cases}$$

- Κάθε στοιχείο εργασίας πρέπει να κατανέμεται μόνο μία φορά, δηλαδή σε ένα μόνο σταθμό εργασίας.

$$\sum_{j=1}^{A} x_{ij} = 1 \ (\text{όπου } i = 1, 2, ..., n)$$

- Δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να παραβιάζονται οι τεχνολογικοί περιορισμοί που αναφέρονται στη σειρά εκτέλεσης των στοιχείων εργασίας. Κάθε εργασία πρέπει να εκτελείται μετά την ολοκλήρωση όλων των άμεσα προηγούμενών της.

Μέθοδοι Εξισορρόπησης

Προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης

Πρώτη φάση

Αρχικά καταγράφονται όλα τα στοιχεία εργασίας με τις αντίστοιχες χρονικές τους διάρκειες. Κατόπιν ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

1. Κατανέμεται ως πρώτο το στοιχείο εργασίας που αντιστοιχεί σε γραμμή του πίνακα ΄Π΄ με όλα τα στοιχεία της μηδενικά. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια στοιχεία εργασίας, κατανέμεται πρώτα εκείνο με τη μεγαλύτερη διάρκεια.

2. Διαγράφεται από τον πίνακα ΄Π΄ η γραμμή του στοιχείου εργασίας που κατανεμήθηκε. Το στοιχείο αυτό αντικαθίσταται με το μηδέν σε όλες τις γραμμές, στις οποίες αποτελεί προηγούμενη εργασία άλλων στοιχείων.

3. Εξετάζεται η γραμμή του πίνακα ΄Ε΄ που αντιστοιχεί στο στοιχείο εργασίας που κατανεμήθηκε και προσδιορίζονται τα άμεσα επόμενα στοιχεία εργασίας, τα οποία είναι υποψήφια για να το ακολουθήσουν στην κατανομή.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

4. Επανάληψη της διαδικασίας των βημάτων 1, 2, και 3 έως ότου κατανεμηθούν όλα τα στοιχεία εργασίας της γραμμής παραγωγής.

5. Μετά την ολοκλήρωση της κατανομής όλων των στοιχείων εργασίας αυτά καταχωρούνται διαδοχικά ένα προς ένα στους σταθμούς εργασίας, ξεκινώντας από τον πρώτο σταθμό.

Κατά την καταχώρηση του κάθε στοιχείου εργασίας σε σταθμό πρέπει να παρακολουθείται η συνθήκη $maxt_l \leq S_k \leq T$ όπου S_k, η συνολική ποσότητα εργασίας που έχει ήδη καταχωρηθεί στο σταθμό k. Όταν παραβιάζεται η συνθήκη, τότε το αντίστοιχο στοιχείο εργασίας καταχωρείται στον επόμενο σταθμό. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν όλα τα στοιχεία του πίνακα ΄Π΄ γίνουν μηδενικά.

Η πρώτη φάση οδηγεί σε μικρού μεγέθους προβλήματα σε ικανοποιητική εξισορρόπηση της γραμμής παραγωγής. Ωστόσο, μπορεί να υπάρξουν περιπτώσεις, κατά τις οποίες παρατηρείται άνιση φόρτιση των σταθμών εργασίας ή καθυστέρηση εξισορρόπησης μεγαλύτερη του επιτρεπτού ορίου που είναι το μέγεθος του χρονικού κύκλου.

Αν παραβιάζεται η συνθήκη $d < T$, τότε θα έπρεπε να επιχειρηθεί μία μικρή αύξηση του χρονικού κύκλου. Σε περίπτωση άνισης φόρτισης των σταθμών εργασίας είναι σκόπιμο να γίνει προσπάθεια μετακινήσεων στοιχείων εργασίας από σταθμό σε σταθμό, έτσι ώστε να κατανέμεται πιο ομοιόμορφα ο νεκρός χρόνος ανάμεσά τους.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Δεύτερη φάση

Χρησιμοποιείται όταν η πρώτη φάση δεν έχει οδηγήσει σε ικανοποιητικό δείκτη ομαλότητας. Στόχος είναι η μείωση της καθυστέρησης εξισορρόπησης και του δείκτη ομαλότητας στο ελάχιστο δυνατό. Συνίσταται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Προσδιορίζεται ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος σταθμός της γραμμής παραγωγής

2. Υπολογίζεται η ημιδιαφορά *G* των περιεχομένων εργασίας των δύο σταθμών.

$$G = \frac{\max S_k - \min S_k}{2}$$

3. Προσδιορίζονται τα στοιχεία εργασίας του μεγαλύτερου σταθμού, τα οποία έχουν διάρκεια μικρότερη από $2*G$ και μπορούν από πλευράς τεχνολογικών περιορισμών να μεταφερθούν σε άλλο σταθμό.

4. Καθορίζονται όλες οι δυνατές ανταλλαγές στοιχείων εργασίας από το μεγαλύτερο και από το μικρότερο σταθμό εργασίας που μπορούν να μειώνουν το περιεχόμενο εργασίας του πρώτου σταθμού και συνεπώς να αυξάνουν το περιεχόμενο του δεύτερου κατά διάρκεια λιγότερη από $2G$.

5. Εκτελούνται όλες οι δυνατές ανταλλαγές, ξεκινώντας από εκείνες που περιλαμβάνουν το μεγαλύτερο σε διάρκεια στοιχείο εργασίας από τα παραπάνω.

6. Αν δεν είναι δυνατή η ανταλλαγή ή μεταφορά του στοιχείων εργασίας μεταξύ του μεγαλύτερου και μικρότερου σταθμού, δοκιμάζονται όλες οι δυνατές ανταλλαγές ή μεταφορές μεταξύ όλων των σταθμών. Οι δοκιμές αυτές πραγματοποιούνται με την εξής σειρά: Ο 1ος σταθμός με το σταθμό *ε* (όπου *ε* ο σταθμός με τον μεγαλύτερο νεκρό χρόνο), με το σταθμό *ε-1*, …, με τον 3ο σταθμό, με τον 2ο σταθμό. Κατόπιν ο 2ος σταθμός κατά σειρά με όλους τους σταθμούς ξεκινώντας με τον *ε* και τελειώνοντας με τον 3ο σταθμό. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται, έως ότου γίνει η τελευταία δοκιμή που θα είναι μεταξύ των σταθμών *ε-1* και *ε*.

7. Όταν ολοκληρωθούν όλες οι παραπάνω ανταλλαγές ή μεταφορές στοιχείων εργασίας, καταργείται η συνθήκη του διπλασίου της ημιδιαφοράς (βλ. βήμα 3). Επιδιώκεται κατόπιν με την επανάληψη των βημάτων 1 έως 6 να γίνουν όλες οι επιπλέον ανταλλαγές ή μεταφορές εργασιών, αρκεί να μην υπερβαίνει το περιεχόμενο εργασίας οποιουδήποτε σταθμού τη διάρκεια του χρονικού κύκλου.

Εφαρμογή μεθοδολογίας εξισορρόπησης

Μεθοδολογία LoB (Line of Balancing Methodology)

Απαιτεί δύο είδη πληροφορίας:

α) γνώση των απαιτήσεων παράδοσης των προϊόντων και

β) δήλωση της σειράς και των χρονικών απαιτήσεων των διαδοχικών σταδίων.

Αυτές οι απαιτήσεις παριστάνονται ως ένα δίκτυο με πολλαπλές αρχές και ένα μόνο τέλος, από το οποίο υπολογίζεται το απαραίτητο χρονικό διάστημα μεταξύ της ολοκλήρωσης του καθενός σταδίου και της ολοκλήρωσης του έργου.

Βήματα μεθοδολογίας LoB

Βήμα 1
Κατασκευάζεται ένα *διάγραμμα CPA* (*Critical Path Analysis diagram*) με πολλές εκκινήσεις. Οι χρονικές διάρκειες που εισάγονται είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι λειτουργίας των μονάδων παραγωγής.

Βήμα 2
Δίνεται χρόνος ίσος με μηδέν στον τελευταίο κόμβο του διαγράμματος CPA. Κατόπιν προστίθενται οι διαδοχικές χρονικές διάρκειες των εργασιών, προχωρώντας αντίστροφα, δηλαδή από τον τελευταίο κόμβο προς τον αμέσως προηγούμενο κ.ο.κ. Τα διαδοχικά αθροίσματα των χρονικών διαρκειών σημειώνονται δίπλα σε κάθε κόμβο.

Βήμα 3
Αριθμούνται όλοι οι κόμβοι κατά φθίνουσα σειρά των ισοδύναμων αριθμών εβδομάδας. Ο αριθμός κάθε κόμβου θα δώσει μία σειρά κόμβων που θα χρησιμοποιηθεί προκειμένου να παραχθεί μία λογική ροή.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Βήμα 4

Καταρτίζεται ένας πίνακας, ο οποίος δείχνει:

α) Το ημερολόγιο των ισοδύναμων αριθμών εβδομάδας

β) Την εβδομαδιαία παραγωγή καθώς και τη συνολική παραγωγή, η οποία πρέπει να έχει ολοκληρωθεί στο τέλος της εβδομάδας

Βήμα 5

Για κάθε εβδομάδα διαβάζονται οι *ποσότητες ισορροπίας*, δηλαδή οι ποσότητες που θα πρέπει να έχουν περάσει από κάθε στάδιο με σκοπό να συνεχίσουν να είναι σε συμφωνία με το τελικό σχέδιο παράδοσης.

Εφαρμογή μεθοδολογίας LoB

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εφαρμογή Προγραμματισμού και Κοστολόγησης Γραμμής Παραγωγής

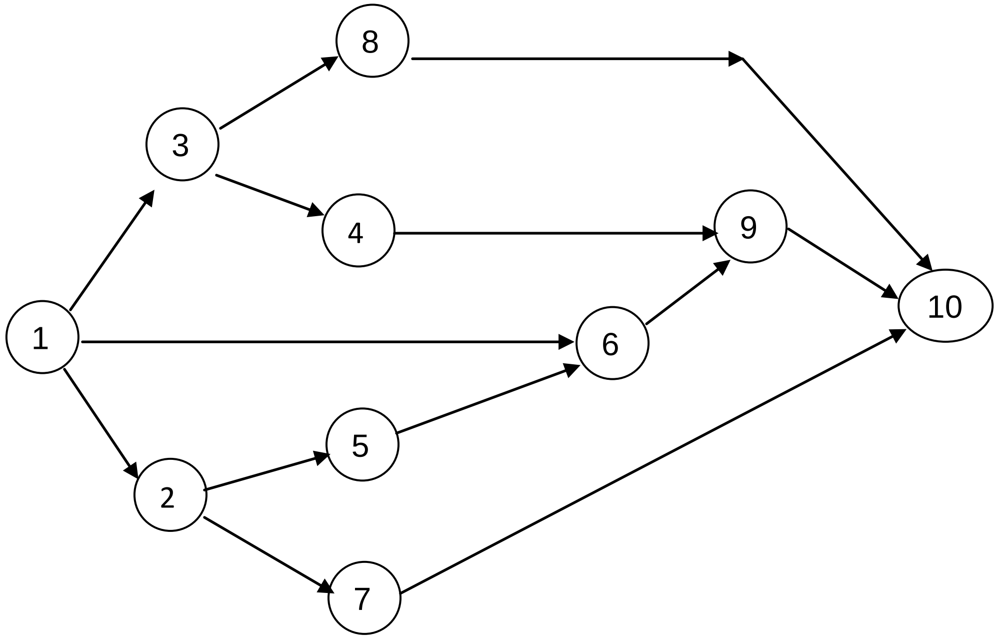
Μια επιχείρηση πρόκειται να ενισχύσει το τμήμα παραγωγής της με μια νέα γραμμή παραγωγής, στην οποία θα κατασκευάζονται οι μονάδες ενός νέου προϊόντος. Η παραγωγή του συνίσταται στη συναρμολόγηση εξαρτημάτων που θα αγοράζονται από το εμπόριο. Το τεχνικό τμήμα συγκέντρωσε τις ακόλουθες πληροφορίες:

- Στόχος της διοίκησης της επιχείρησης είναι η συναρμολόγηση συνολικά 12.000 μονάδων του νέου προϊόντος.
- Οι εργασίες συναρμολόγησης πρέπει να γίνονται σύμφωνα με συγκεκριμένους τεχνολογικούς περιορισμούς (βλ. διάγραμμα επόμενης σελίδας).
- Οι διάρκειες των 10 στοιχείων εργασίας της γραμμής (σε min) είναι οι εξής:

Στοιχείο εργασίας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Διάρκεια (σε ‘)	10	7	6	14	8	6	13	10	10	6

- Η χωροθέτηση της νέας γραμμής παραγωγής επιβάλλει την εκτέλεση των στοιχείων εργασίας 7 και 8 στον ίδιο σταθμό εργασίας.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα



- Μετά από κοστολόγηση προϋπολογίσθηκαν τα εξής στοιχεία κόστους:

  Κόστος εξαρτημάτων ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος: €40
  Ωριαία μικτή αμοιβή τεχνίτη: €20
  Ωριαίο κόστος λειτουργίας της γραμμής παραγωγής: €80
  Κόστος δημιουργίας ενός σταθμού εργασίας: €6.000
  Κόστος εκπαίδευσης ανά τεχνίτη: €500

Αν θεωρηθεί ότι ο κάθε σταθμός εργασίας πρόκειται να επανδρωθεί από έναν τεχνίτη, ζητείται ο καλύτερος δυνατός σχεδιασμός της νέας γραμμής παραγωγής, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος παραγωγής των 12.000 μονάδων προϊόντων που πρόκειται να συναρμολογηθούν κατά την επόμενη περίοδο.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Από τους τεχνολογικούς περιορισμούς προκύπτουν οι πίνακες διαδοχής ΄Π΄ και ΄Ε΄

Στοιχείο εργασίας	Πίνακας ΄Π΄	Πίνακας ΄Ε΄
1	0 0 0	2 3 6
2	1 0 0	5 7 0
3	1 0 0	4 8 0
4	3 0 0	9 0 0
5	2 0 0	6 0 0
6	1 5 0	9 0 0
7	2 0 0	10 0 0
8	3 0 0	10 0 0
9	4 6 0	10 0 0
10	7 8 9	10 0 0

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία της προσεγγιστικής μεθόδου επίλυσης για την κατανομή των στοιχείων εργασίας προκύπτει η αλληλουχία:

1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 4 - 9 - 7 - 8 - 10

Για να προσδιοριστεί η καλύτερη δυνατή λύση είναι απαραίτητο να εξεταστούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Για κάθε περίπτωση υπολογίζεται το περιεχόμενο εργασίας του κάθε σταθμού και η αντίστοιχη καθυστέρηση εξισορρόπησης.
Σημείωση: Ο χρονικός κύκλος δεν μπορεί να έχει διάρκεια μικρότερη από 23', όσο δηλ. διαρκούν οι εργασίες 7 και 8 που πρέπει να περιληφθούν στον ίδιο σταθμό.

Ανάλυση περιπτώσεων σχεδιασμού της γραμμής παραγωγής

Περίπτωση	Στοιχεία εργασίας / σταθμό	S_i	T	di	d	ΔΟ
1	Όλες οι εργασίες	90	90	0	0	0
2	1ος σταθμός: 1-2-3-4-5	45	45	0	0	0
	2ος σταθμός: 6-7-8-9-10	45		0		
3	1ος σταθμός: 1-2-3-4-5	31	31	0	3	2,24
	2ος σταθμός: 7-8-6	30		1		
	3ος σταθμός: 4-9-10	29		2		
4	1ος σταθμός: 1-2-3	23	23	0	2	1,41
	2ος σταθμός: 4-5	22		1		
	3ος σταθμός: 7-8	23		0		
	4ος σταθμός: 6-9-10	22		1		

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

όπου A: το πλήθος των σταθμών εργασίας
S_i: το περιεχόμενο εργασίας του σταθμού i
T: ο χρονικός κύκλος
d_i: η καθυστέρηση εξισορρόπησης του σταθμού i
d: η συνολική καθυστέρηση εξισορρόπησης
ΔΟ: ο δείκτης ομαλότητας

Το κριτήριο επιλογής της καλύτερης από τις παραπάνω περιπτώσεις είναι το ολικό κόστος παραγωγής των 12.000 μονάδων του νέου προϊόντος.

Για το σκοπό αυτό πρέπει να καταρτιστεί η συνάρτηση *K* του συνολικού κόστους που πρέπει να περιλαμβάνει την αγορά των εξαρτημάτων, τις δαπάνες εργασίας των τεχνιτών, τις δαπάνες λειτουργίας της γραμμής, τη δημιουργία των σταθμών εργασίας καθώς και την εκπαίδευση των τεχνιτών.

$$K = \underbrace{12000 * 4}_{\text{εξαρτήματα}} + \underbrace{20 * \frac{12000}{60} * T * A}_{\text{εργατικά}} + \underbrace{80 * \frac{12000}{60} * T}_{\text{λειτουργικά}} + \underbrace{6000 * A}_{\text{σταθμοί}} + \underbrace{500 * A}_{\text{εκπαίδευση}}$$

$$K = 48.000 + 4.000 * T * A + 16.000 * T + 6.500 * A$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Με αντικατάσταση των μεγεθών *A* και *T* στη συνάρτηση για κάθε μία περίπτωση προκύπτει ότι:

- 1η περίπτωση: K(A=1, T=90) = €1.854.500
- 2η περίπτωση: K(A=2, T=45) = €1.141.000
- 3η περίπτωση: K(A=3, T=31) = €935.500
- 4η περίπτωση: K(A=4, T=23) = €810.000

Επομένως επιλέγεται, ως φθηνότερη, η λύση του σχεδιασμού της νέας γραμμής παραγωγής με 4 σταθμούς εργασίας και χρονικό κύκλο 23'.
Η συνολική καθυστέρηση εξισορρόπησης είναι 2' και ο δείκτης ομαλότητας 1,41.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Κατανομή στοιχείων εργασίας σε τέσσερις σταθμούς

Σταθμός	Στοιχεία εργασίας	Διάρκεια	Περιεχόμενο σταθμού	Καθυστέρηση σταθμού
1ος	1 2 3	10 7 6	23	0
2ος	4 5	14 8	22	1
3ος	7 8	13 10	23	0
4ος	6 9 10	6 10 6	22	1

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα